

Maa 57.290 Fotogrammetrian erikoistyö

# **Kaksiulotteisesta projektiivisesta muunnoksesta**

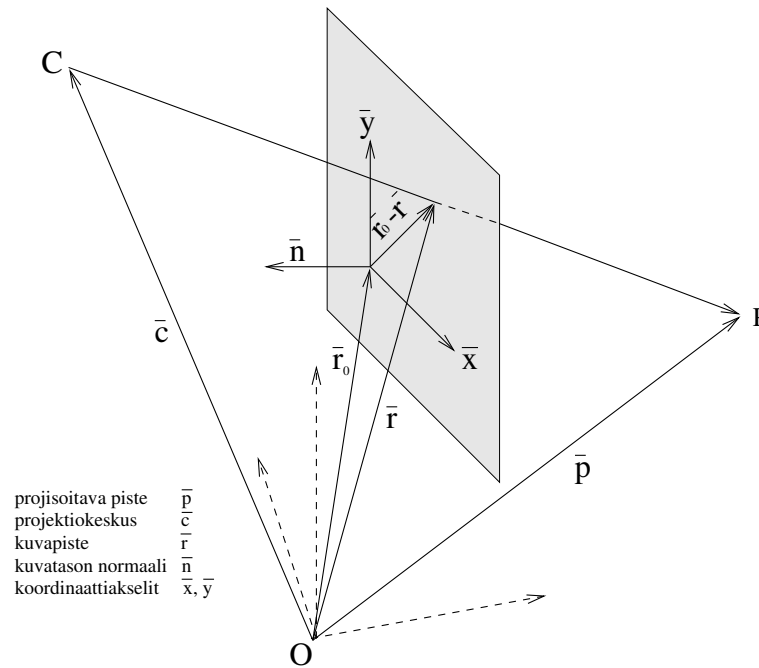
Petteri Pöntinen

36171s

12. toukokuuta 1999

# Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2 Matemaattinen tausta</b>	<b>1</b>
2.1 Johto vektorialgebraa käyttäen . . . . .	1
2.2 Johto suoraan kollineaarisuusyhtälöistä . . . . .	4
<b>3 Muunnoksen ominaisuuksista</b>	<b>5</b>
3.1 Suorien kuvautuminen . . . . .	5
3.2 Käänteismuunnos . . . . .	6
3.3 Homogeeninen esitysmuoto . . . . .	6
3.4 Esimerkkejä . . . . .	7
<b>4 Muunnosparametrien määrittäminen</b>	<b>7</b>
4.1 Eteenpäinmuunnos . . . . .	7
4.2 Käänteismuunnos . . . . .	10
<b>5 Muunnoksen tulkinta</b>	<b>11</b>
5.1 Parametrien variointi . . . . .	11
5.2 Tasotulkinta . . . . .	13
5.3 Erikoispisteiden käyttö . . . . .	13
<b>6 Loppusanat</b>	<b>14</b>
<b>Viitteet</b>	<b>14</b>
<b>Liite 1</b>	<b>17</b>
<b>Liite 2</b>	<b>18</b>



Kuva 1: Pistein projektio tasolle.

## 1 Johdanto

Tässä erikoistyössä on ruodittu kaksiulotteista projektiivista muunosta. Aluksi on esitetty muunnoksen matemaattinen tausta ja joitakin sen perusominaisuuksia (kappaleet 2 ja 3). Tämän jälkeen on kerrottu miten muunnos voidaan laskea vastinkuvapisteen avulla (kappale 4). Kappaleessa 5 on esitetty jossain määrin laihaksi jäänyt yritys löytää muunnoksesta jotain uutta ja käyttökelpoista.

Jotta lukija voisi itse tutkia ja varmistaa tässä työssä esille tulleita asioita, on liitteessä 1 esitetty yksinkertaisen havaintovälineen rakennus- ja käyttöohjeet ja liitteessä 2 muutamia Matlab-koodeja muunnoksen laskemiseksi ja visualisoimiseksi.

## 2 Matemaattinen tausta

### 2.1 Johto vektorialgebraa käyttäen

Kuvassa 1 on esitetty pisteen  $P$  projisointi kuvatasolle. Katkoviivat kuvaavat vapaasti valittua suorakulmaista ja oikeakätistä koordinaatistoa. Kuvatason määrittävät tason normaalivektori  $\bar{n}$  ja jokin tasossa sijaitseva piste. Valitaan tasosta jokin mielivaltainen piste kuvakoordinaatiston origoksi jonka paikkavektori katkoviivoilla osoitetussa koordinaatistossa on  $\bar{r}_0$ . Vektorit  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  määrittävät kuvakoordinaatiston akseliston. Vektoreille  $\bar{n}, \bar{x}$  ja  $\bar{y}$  pätee

$$|\bar{n}| = |\bar{x}| = |\bar{y}| = 1 \quad (1)$$

ja koska  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan niin myös

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0. \quad (2)$$

Jos piste  $\bar{h}$  sijaitsee kuvatasolla, toteuttaa se lausekkeen

$$\bar{n} \cdot (\bar{h} - \bar{r}_0) = 0. \quad (3)$$

Vektorille  $\bar{r}$  voidaan kirjoittaa

$$\bar{r} = \bar{c} + s(\bar{p} - \bar{c}), \quad (4)$$

missä  $s$  on tuntematon kerroin. Koska  $\bar{r}$  on kuvatason pisteen paikkavektori, niin  $\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = \bar{n}(\bar{c} + s(\bar{p} - \bar{c}) - \bar{r}_0) = \bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{r}_0 + s(\bar{p} - \bar{c})) = 0$  ja  $s$  voidaan ratkaista

$$s = \frac{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{r}_0)}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \quad (5)$$

Kuvapisteen  $x$ -koordinaatti  $x'$  saadaan projisoimalla vektori  $\bar{r} - \bar{r}_0$  vektorille  $\bar{x}$

$$x' = \bar{x} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) \quad (6)$$

ja käyttämällä lauseketta (4) saadaan

$$x' = \bar{x} \cdot [\bar{c} + s(\bar{p} - \bar{c}) - \bar{r}_0] = \bar{x} \cdot ((\bar{c} - \bar{r}_0) + s(\bar{p} - \bar{c})). \quad (7)$$

Sijoittamalla lauseke (5) lausekkeeseen (7) saadaan

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x} \cdot ((\bar{c} - \bar{r}_0) + \frac{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{r}_0)}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}(\bar{c} - \bar{p})) \\ &= \bar{x} \cdot \frac{[\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})](\bar{c} - \bar{r}_0) - [\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{r}_0)](\bar{c} - \bar{p})}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Käyttämällä sääntöä  $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c = a \times (b \times c)$  saadaan

$$x' = \bar{x} \cdot \frac{\bar{n} \times [(\bar{c} - \bar{r}_0) \times (\bar{c} - \bar{p})]}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})} \quad (9)$$

ja säännön  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$  perusteella edelleen

$$x' = \frac{(\bar{x} \times \bar{n}) \cdot [(\bar{c} - \bar{r}_0) \times (\bar{c} - \bar{p})]}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \quad (10)$$

Oikeakätiselle koordinaatistolle pätee  $\bar{x} \times \bar{n} = -\bar{y}$ , jolloin saadaan

$$x' = -\frac{\bar{y} \cdot [(\bar{c} - \bar{r}_0) \times (\bar{c} - \bar{p})]}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \quad (11)$$

Myös kuvapisteen  $y'$ -koordinaatti saadaan samalla tavalla projisoimalla vektori  $\bar{r} - \bar{r}_0$  vektorille  $\bar{y}$

$$y' = \bar{y} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0). \quad (12)$$

Vertaamalla lausekkeita (6) ja (12) voidaan kirjoittaa suoraan

$$y' = \frac{(\bar{y} \times \bar{n}) \cdot [(\bar{c} - \bar{r}_o) \times (\bar{c} - \bar{p})]}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \quad (13)$$

Ja koska käytetään oikeakätistä koordinaatistoa niin  $\bar{y} \times \bar{n} = \bar{x}$ , jonka perusteella saadaan

$$y' = \frac{\bar{x} \cdot [(\bar{c} - \bar{r}_o) \times (\bar{c} - \bar{p})]}{\bar{n} \cdot (\bar{c} - \bar{p})}. \quad (14)$$

Tekemällä sijoitukset

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \bar{r}_o = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \text{ and } \bar{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (15)$$

yhtälöön (11) and ryhmittelemällä termit saadaan

$$x' = \frac{(-y_2c_3 + y_2r_3 + y_3c_2 - y_3r_2)x}{(-n_1)x + (-n_2)y + (-n_3)z + (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)} + \frac{(y_1c_3 - y_1r_3 - y_3c_1 + y_3r_1)y}{(-n_1)x + (-n_2)y + (-n_3)z + (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)} + \frac{(-c_2y_1 + r_2y_1 + c_1y_2 - r_1y_2)z}{(-n_1)x + (-n_2)y + (-n_3)z + (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)} + \frac{(-r_2c_3y_1 + c_2r_3y_1 - c_1r_3y_2 + y_2r_1c_3 - y_3r_1c_2 + y_3c_1r_2)}{(-n_1)x + (-n_2)y + (-n_3)z + (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)}. \quad (16)$$

Helposti nähdään, että myös  $y'$  voidaan muokata samanlaiseen muotoon. Nimeämällä termit uudelleen voidaan kirjoittaa

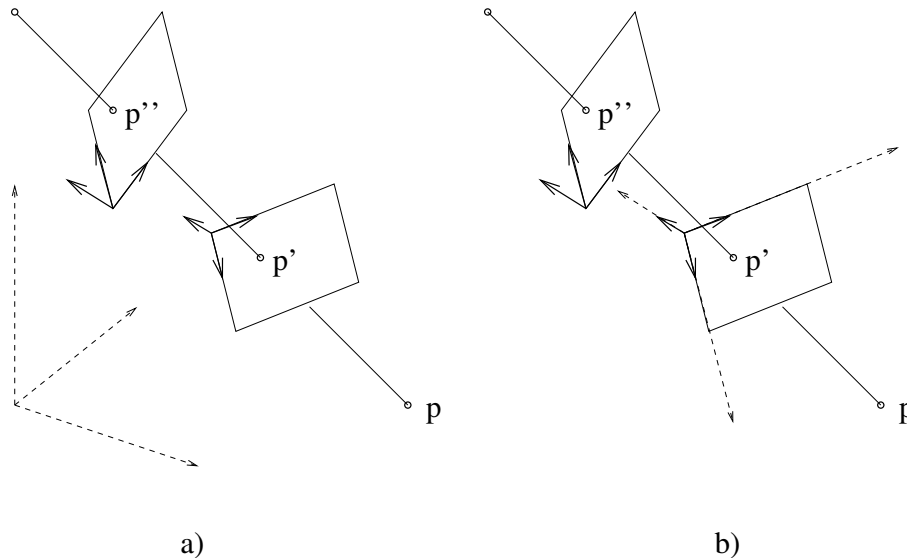
$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \quad (17)$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}. \quad (18)$$

Näin on saatu johdettua tutut suoran lineaarisen muunnoksen (Direct Linear Transformation) yhtälöt. Ne kertovat avaruuspuheen kolmiulotteisten koordinaattien ja vastaavien kuvakoordinaattien välisen yhteyden. Ajatellaanpa että yhden tason sijasta meillä onkin niitä kaksi leikkaamassa samoja kuvaussäteitä (kuva 3 a). Lisäksi sijoitetaan kohdekoordinaatisto siten, että se yhtyy toisen kuvan kuvakoordinaatistoon (kuva 3 b). Yhtälöt (17) and (18) pätevät myös tässä tapauksessa. Koska  $p$  ja  $p'$  sijaitsevat samalla kuvaussäteellä, on niiden molempien projektio ylimmällä kuvalla  $p''$ . Toisin sanoen pisteet  $(x \ y \ z)^T$  voidaan ”korvata” pisteellä  $(x' \ y' \ 0)^T$  laskettaessa kuvakoordinaatteja  $x''$  ja  $y''$ . Saamme siis

$$x'' = \frac{p_1x' + p_2y' + p_3 \cdot 0 + p_4}{p_9x' + p_{10}y' + p_{11} \cdot 0 + p_{12}} = \frac{p_1x' + p_2y' + p_4}{p_9x' + p_{10}y' + p_{12}}, \quad (19)$$

$$y'' = \frac{p_5x' + p_6y' + p_7 \cdot 0 + p_8}{p_9x' + p_{10}y' + p_{11} \cdot 0 + p_{12}} = \frac{p_5x' + p_6y' + p_8}{p_9x' + p_{10}y' + p_{12}}. \quad (20)$$



Kuva 2: a) Kaksi eri tasoa leikkaamassa samaa kuvaussädettä. b) Kohdekoordinaatisto siirrettynä toisen kuvan kuvakoordinaatistoon.

Jakamalla lausekkeiden (19) and (20) osoittajat ja nimittäjät parametrilla  $p_{12}$  saadaan

$$x'' = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{a_7 x' + a_8 y' + 1}, \quad (21)$$

$$y'' = \frac{a_4 x' + a_5 y' + a_6}{a_7 x' + a_8 y' + 1}. \quad (22)$$

Lausekkeet (21) ja (22) ovat tutut "tasolta tasolle"-muunnoksen kaavat. Tässä yhteydessä on hyvä huomauttaa että lausekkeiden (19) ja (20) osoittajat ja nimittäjät olisi voitu jakaa millä tahansa parametreista  $p_i$ , jolloin olisi saatu uudet kahdeksan parametria. Jos pyritään minimoimaan laskentatarkkuudesta aiheutuvat virheet, kannattaa välttää jakamista sellaisella parametrilla, jonka itseisarvo on lähellä nollaa.

## 2.2 Johto suoraan kollineaarisuusyhtälöistä

Koska kollineaarisuusyhtälöiden oletetaan olevan lukijalle entuudestaan tuttuja, ei niitä tässä yhteydessä ryhdytä johtamaan vaan tyydytään toteamaan, että jos projektiokeskus  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , kuvapiste  $(x, y)$  ja kohdepiste  $(X, Y, Z)$  ovat samalla suoralla, toteuttavat ne yhtälöt

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \quad (23)$$

$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}, \quad (24)$$

missä  $c$  on kameravakio ja  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{33}$  kiertomatriisin elementtejä. Aivan kuten suoran lineaarisen muunnoksenkin kohdalla yhtälöt (23) ja (24) ilmaisevat mihin

jokin avaruus piste projisoituu kuvalla. Jos kohde on taso ja vieläpä XY-tason suuntainen, tulee termistä  $(Z - Z_0)$  vakio. Merkitään tätä vakiota  $H$ :lla. Kertomalla ja ryhmittelemällä voidaan yhtälöt (23) ja (24) saattaa muotoon

$$x = \frac{-cm_{11}X - cm_{12}Y - c(m_{13}H + m_{11}X_0 + m_{12}Y_0)}{m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0} \quad (25)$$

$$y = \frac{-cm_{21}X - cm_{22}Y - c(m_{23}H + m_{21}X_0 + m_{22}Y_0)}{m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}. \quad (26)$$

Jakamalla osoittajat ja nimittäjät termillä  $m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0$  ja nimeämällä kertoimet uudelleen saadaan aikaiseksi yhtälöt (21) ja (22). Tällöin huomataan siis, että

$$a_1 = \frac{-cm_{11}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (27)$$

$$a_2 = \frac{-cm_{12}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (28)$$

$$a_3 = \frac{-c(m_{13}H + m_{11}x_0 + m_{12}Y_0)}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (29)$$

$$a_4 = \frac{-cm_{21}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (30)$$

$$a_5 = \frac{-cm_{22}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (31)$$

$$a_6 = \frac{-c(m_{23}H + m_{21}x_0 + m_{22}Y_0)}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad (32)$$

$$a_7 = \frac{m_{31}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}, \quad \text{ja} \quad (33)$$

$$a_8 = \frac{m_{32}}{m_{33}H + m_{31}X_0 + m_{32}Y_0}. \quad (34)$$

Yhtälöt (27)-(34) ovat siinä mielessä ”mukavia”, että niistä näkee mitkä fysikaaliset tekijät mihinkin muunnosparametriin vaikuttavat. Käänteinen tehtävä, ts. miten jonkin parametrin muuttaminen vaikuttaa fysikaalisiin tekijöihin, ei valitettavasti ole kovin helposti nähtävissä. Tätä ongelmaa voidaan hieman myöhemmin.

## 3 Muunnoksen ominaisuuksista

### 3.1 Suorien kuvautuminen

Nyt kun kaksiulotteisen projekttiivisen muunnoksen matemaattinen ja fysikaalinen tausta on tullut jossain määrin tutuksi, voidaan tehdä jotain yksinkertaisia johtopäätöksiä sen ominaisuuksista. On esim. melko helppo hyväksyä väite, että kyseisessä muunnoksessa suorat kuvautuvat suoriksi. Kuvalla näkyvä suora ja projektio-keskus määrittävät tason, jonka leikkaus jonkin toisen kuvatason kanssa on tietysti suora. Ja koska kyseessä on keskusprojektio, vastinsuorien kaksoissuhteet säilyvät [Nyström 1968].

### 3.2 Käänteismuunnos

Jos projektiokeskus ei sijaitse kummallakaan kuvatasolla (tai sen jatkeella) leikkaa kuvaussäde molemmat tasot vain kerran. Toisin sanoen jokaiselle tason pisteelle löytyy tasan yksi vastin piste toisella tasolla. Tämä tarkoittaa sitä, että muunnos on mahdollista laskea molempiin suuntiin (tasolta A tasolle B ja tasolta B tasolle A). Jos muunnos tasolta A tasolle B on muotoa

$$x'' = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{a_7 x' + a_8 y' + 1}, \quad (35)$$

$$y'' = \frac{a_4 x' + a_5 y' + a_6}{a_7 x' + a_8 y' + 1}, \quad (36)$$

on muunnos tasolta B tasolle A muotoa [Slama et al. 1980]

$$x' = \frac{(a_5 - a_6 a_8) x'' + (a_3 a_8 - a_2) y'' + (a_2 a_6 - a_3 a_5)}{(a_4 a_8 - a_5 a_7) x'' + (a_2 a_7 - a_1 a_8) y'' + (a_1 a_5 - a_2 a_4)}, \quad (37)$$

$$y' = \frac{(a_6 a_7 - a_4) x'' + (a_1 - a_3 a_7) y'' + (a_3 a_4 - a_1 a_6)}{(a_4 a_8 - a_5 a_7) x'' + (a_2 a_7 - a_1 a_8) y'' + (a_1 a_5 - a_2 a_4)}. \quad (38)$$

Yhtälö (37) saadaan ratkaisemalla ensin  $y'$  yhtälöstä (35) ja sijoittamalla se yhtälöön (36). Vastaavasti yhtälö (38) saadaan kun ratkaistaan ensin  $x'$  yhtälöstä (35) ja sijoitetaan se yhtälöön (36).

### 3.3 Homogeeninen esitysmuoto

Kaksiulotteinen projektiivinen muunnos voidaan esittää kätevästi myös matriisimuodossa homogeenisia koordinaatteja käyttäen

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (39)$$

jolloin suorakulmaiset koordinaatit  $x''$  ja  $y''$  saadaan homogeenisista jakamalla  $x'''/z'''$  ja  $y'''/z'''$  [Niini 1990]. Jos yhtälö (39) kerrotaan molemmiin puolin  $P$ :n käänteismatriisilla saadaan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Koska matriisi  $P$  on vain  $3 \times 3$  matriisi, on se helppo kääntää determinantteja apuna käyttäen [Kreyszig 1993], jolloin saadaan

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} a_5 - a_6 a_7 & a_3 a_8 - a_2 & a_2 a_6 - a_3 a_5 \\ a_6 a_7 - a_4 & a_1 - a_3 a_7 & a_3 a_4 - a_1 a_6 \\ a_4 a_8 - a_5 a_7 & a_2 a_7 - a_1 a_8 & a_1 a_5 - a_2 a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{|P|} Q, \quad (41)$$

missä

$$|P| = a_1(a_5 - a_6 a_7) - a_2(a_4 - a_6 a_7) + a_3(a_4 a_8 - a_5 a_7). \quad (42)$$

Matriisin  $Q$  alkioit ovat tietysti samoja kuin yhtälöiden (37) ja (38) kertoimet. Koska projektiivinen muunnos on ”kaksisuuntainen”, on matriisilla  $P$  oltava käänteismatriisi. Ja toisaalta tiedetään, että jos matriisin determinantti on nolla, ei matriisilla ole käänteismatriisia. Tästä saadaan muunnosparametreja sitova lauseke

$$|P| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (43)$$

### 3.4 Esimerkkejä

Kuvissa 4-14 on esitetty kuva 3 muunnetuna erilaisilla projektiivisillä muunnoksilla. Kuvista nähdään että muunnoksella on mahdollista toteuttaa kiertoja (kuvat 4 ja 5), ”kutistamisia” (kuvat 6-9), peilauksia (kuva 10) jne. Myös kaikkien edellä mainittujen yhdistelmiä voidaan saada aikaan (kuvat 11-13). Kuvassa 14 on esitetty tapaus, joka syntyy kun kuvatasot sijaitsevat kuvan 15 esittämällä tavalla. Kuvaa 14 lukuunottamatta kaikki em. esimerkit on helposti havainnollistettavissa liitteessä 1 esitetyllä välineellä.

## 4 Muunnosparametrien määrittäminen

### 4.1 Eteenpäinmuunnos

Yhtälöistä (21) ja (22) nähdään, että kaksiulotteisessa projektiivisessä muunnoksessa on kahdeksan parametria. Koska jokaista kuvapisteparia  $(x'_i, y'_i)$ ,  $(x''_i, y''_i)$  kohti saadaan kaksi yhtälöä, riittää muunnosparametrien laskemiseksi neljä pisteparia. Jos muunnosparametrien ratkaisemisessa käytetään tätä minimimäärää pisteitä, eivät niistä mitkään kolme saa sijaita samalla suoralla. Jos yhtälöiden (21) ja (22) molemmat puolet kerrotaan termillä  $a_7x' + a_8y' + 1$  saadaan

$$x''_i(a_7x'_i + a_8y'_i + 1) = a_1x'_i + a_2y'_i + a_3, \quad (44)$$

$$y''_i(a_7x'_i + a_8y'_i + 1) = a_4x'_i + a_5y'_i + a_6, \quad (45)$$

joista edelleen kertomalla ja termejä siirtämällä saadaan

$$a_1x'_i + a_2y'_i + a_3 - a_7x'_ix''_i - a_8y'_ix''_i = x''_i, \quad (46)$$

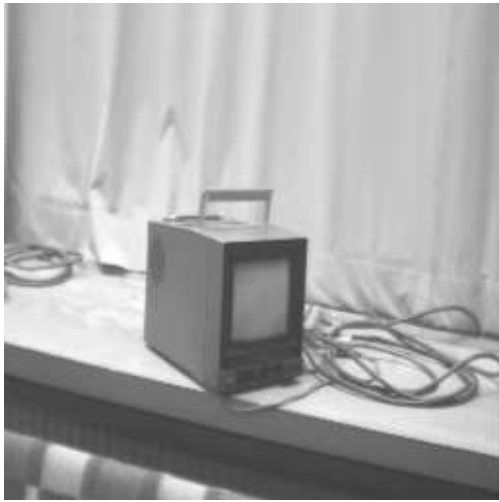
$$a_4x'_i + a_5y'_i + a_6 - a_7x'_iy''_i - a_8y'_iy''_i = y''_i. \quad (47)$$

Yllä oleat yhtälöt voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{1}, \quad (48)$$

missä

$$\mathbf{A}_{2n \times 8} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1x''_1 & -y'_1x''_1 \\ 0 & 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & 1 & -x'_1y''_1 & -y'_1y''_1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_2x''_2 & -y'_2x''_2 \\ 0 & 0 & 0 & x'_2 & y'_2 & 1 & -x'_2y''_2 & -y'_2y''_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n & y'_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_nx''_n & -y'_nx''_n \\ 0 & 0 & 0 & x'_n & y'_n & 1 & -x'_ny''_n & -y'_ny''_n \end{bmatrix}, \quad (49)$$



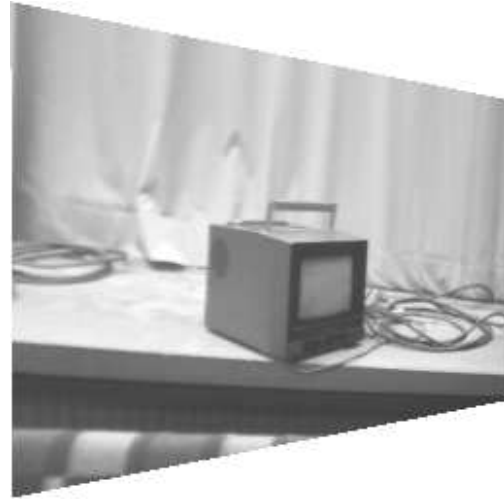
Kuva 3:



Kuva 4:



Kuva 5:



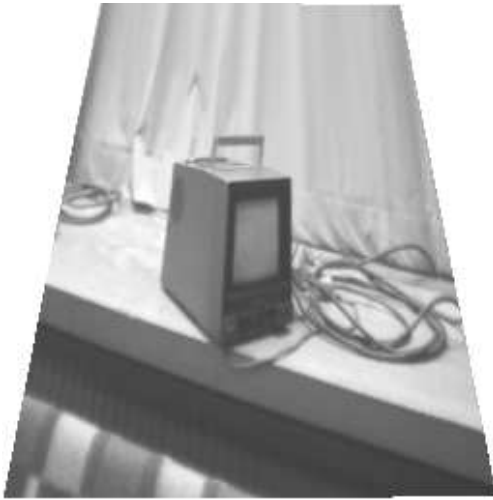
Kuva 6:



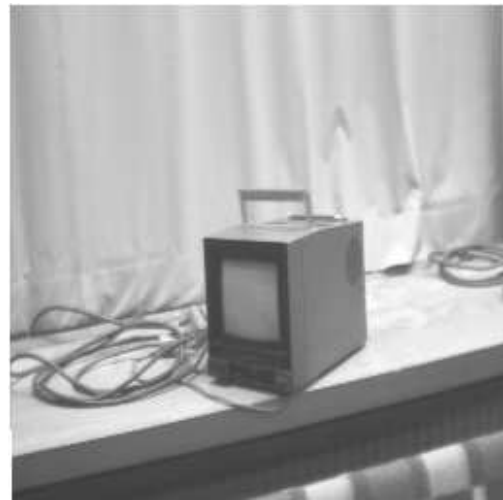
Kuva 7:



Kuva 8:



Kuva 9:



Kuva 10:



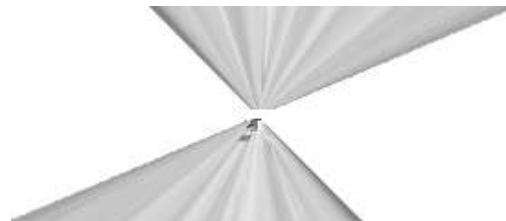
Kuva 11:



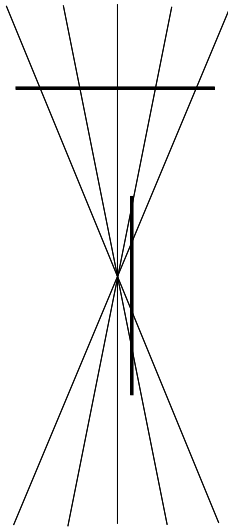
Kuva 12:



Kuva 13:



Kuva 14:



Kuva 15: Kuva 14 vastaavan muunnoksen fysikaalinen esitys.

$$\mathbf{x}_{8 \times 1} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_8)^T \text{ ja} \quad (50)$$

$$\mathbf{l}_{2n \times 1} = (x''_1 \ y''_1 \ x''_2 \ y''_2 \ \dots \ x''_n \ y''_n)^T, \quad (51)$$

missä  $n$  on pisteparien lukumäärä. Jos  $n$  on suurempi kuin neljä, ei yhtälöllä (48) ole yksikäsitteistä ratkaisua. Ratkaisu  $\hat{\mathbf{x}}$  joka minimoi jäännösvirheiden

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (52)$$

neliösumman  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  saadaan laskemalla [Inkilä 1997]

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (53)$$

Ratkaistujen parametrien kovarianssimatriisiksi saadaan

$$\Sigma = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (54)$$

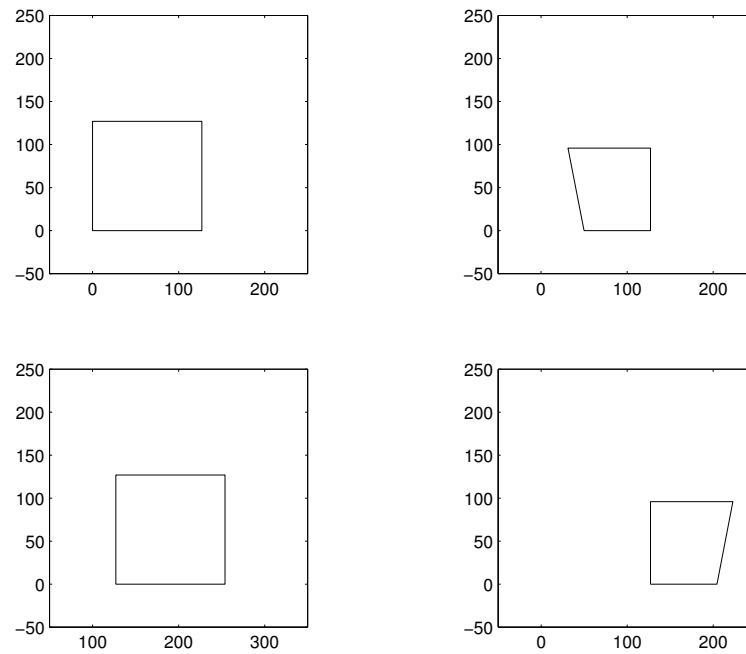
missä

$$\sigma_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2n - 8}. \quad (55)$$

Koska kyseessä on lineaarinen tapaus ratkeavat muunnosparametrit ilman iterointia.

## 4.2 Käänteismuunnos

Käänteismuunnos saadaan laskettua vaihtamalla pisteiden  $(x'_i, y'_i)$  ja  $(x''_i, y''_i)$  paikkaa yhtälöissä (44)-(51). Mikäli eteenpäinmuunnos on jo laskettu voidaan käänteismuunnos laskea eteenpäinmuunnoksen muunnosparametrien avulla käyttäen yhtälöitä (37) ja (38).



Kuva 16: Kaksi eri kohdissa sijaitsevaa neliötä muunnettuna samalla muunnoksella. Ylärivin tapauksessa nelikulmio näyttää vinoutuvan vasemmalle ja alarivin tapauksessa oikealle.

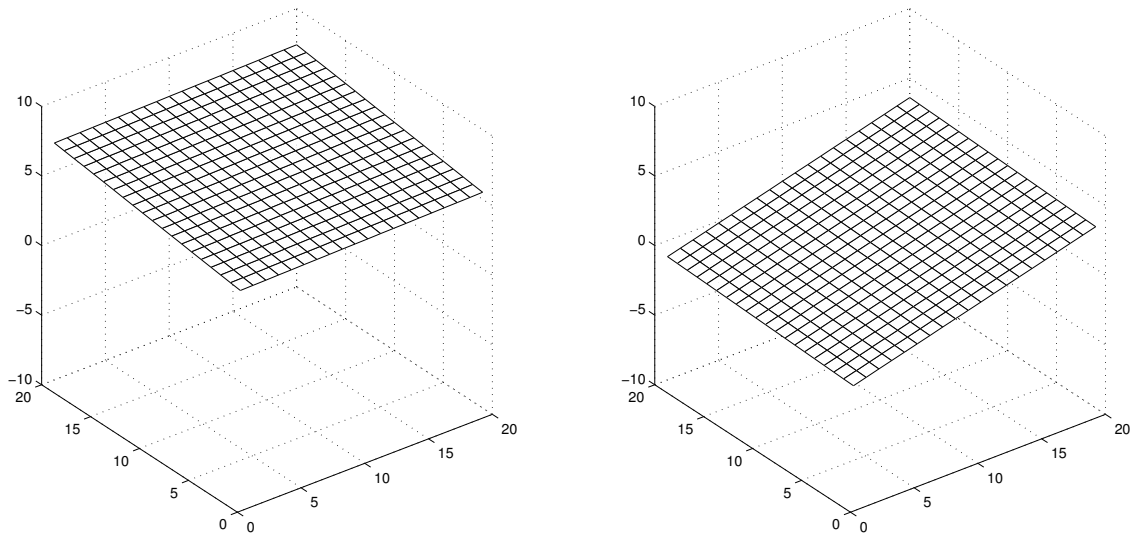
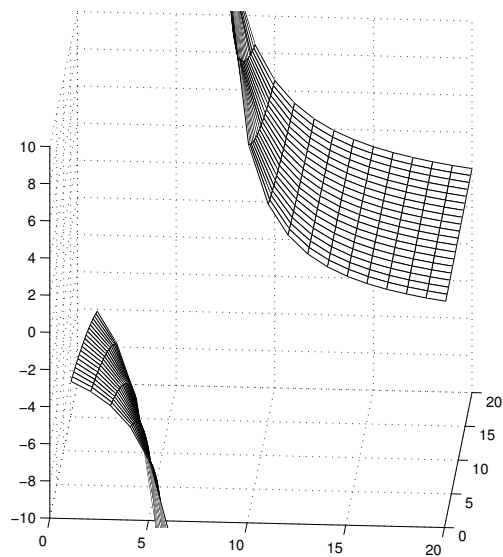
## 5 Muunnoksen tulkinta

### 5.1 Parametrien variointi

Tässä luvussa tutkitaan miten eri muunnosparametrit vaikuttavat saatavaan lopputulokseen eli muunnettuun kuvaan. Jos asiaa halutaan tutkia kokeellisesti laskemalla muunnoksia parametrien arvoja vaihdellen törmätään muutamiin hankaluuksiin. Ensimmäinen hankaluus on se, että jos halutaan tutkia kaikki parametrikombinaatiot vaihdellen parametrien suuruutta (itseisarvoa) ja etumerkkiä, saadaan tutkittavaksi

$$4^8 - 1 = 65535 \quad (56)$$

tapausta. Toinen hankaluus on se, että myös itse muunnettava pisteistö vaikuttaa lopputulokseen. Tästä esimerkkinä on kuvan 16 tapaus. Siinä on samalla muunnoksella muutettu kaksi samankokoista neliötä. Neliöt sijaitsevat alkuperäisessä koordinaatistossa eri kohdissa, ja tästä johtuen ne ”reagoivat” muunnokseen eri lailla. Kolmas hankaluus on se, että parametrit ovat fyysikaalisten taustojensa myötä sidoksissa toisiinsa, eikä niitä siksi voida käsitellä erikseen muutoin kuin erikoistapauksissa. Esimerkiksi jos parametri  $a_1$  on huomattavan suuri muihin verrattuna, venyttäne se kuvaa x-akselin suunnassa. Mutta jos sekä  $a_1$  että  $a_7$  ovat huomattavan suuria, ei em. johtopäätös välttämättä enää pädekään. Tästä johtuen on hyvin vaikea luoda mitään helppoja ja yleispäteviä ”sääntöjä”, joiden perusteella muunnosta voitaisiin luonnehtia.

Kuva 17: Tasot  $z_1$  ja  $z_2$ .Kuva 18: Tasojen  $z_1$  ja  $z_2$  osamäärä.

## 5.2 Tasotulkinta

Jos katsotaan taas hieman yhtälöitä

$$x'' = \frac{a_1x' + a_2y' + a_3}{a_7x' + a_8y' + 1}, \quad (57)$$

$$y'' = \frac{a_4x' + a_5y' + a_6}{a_7x' + a_8y' + 1} \quad (58)$$

huomataan, että osoittajissa ja nimittäjissä on itse asiassa tasojen yhtälöt. Muunnetut koordinaatit saadaan siis jakamalla taso tasolla. Vaikka itse tasot ovat helposti hahmoteltavissa olevia kohteita, ei ole aivan helppoa sanoa mitä kahden tason osamääränä mahtaa syntyä. Otetaanpa siis esimerkki sen selvittämiseksi. Kuvitellaan että meillä on kaksi tasoa (kuva 17),

$$z_1 = 0.1x + 0.02y + 5 \text{ ja} \quad (59)$$

$$z_2 = 0.03x + 0.25y - 2. \quad (60)$$

Jakamalla  $z_1/z_2$  saadaan kuvassa 18 esitetty pinta. Kuten huomataan se ei enää olekaan taso vaan jotain aivan muuta. Ja kun vielä muistetaan, että koordinaattiparin  $(x'', y'')$  saamiseksi on suoritettava kaksi tasolla jakoa, on tämänkin tulkintatavan käyttökelpoisuus hieman kyseenalainen. Tasojen sijaintien ja kallistusten perusteella voidaan toki päätellä jotain muunnoksen ominaisuuksista, mutta vähemmällä työllä pääsee, jos suorittaa muunnoksen ja toteaa millaiseksi alkuperäinen kuva muokkautui.

## 5.3 Erikoispisteiden käyttö

Muunnoksen luonnetta voidaan hahmotella kätevästi muutaman erikoispisteen avulla. Nämä pisteet ovat  $(\infty, y')$ ,  $(x', \infty)$  ja  $(0, 0)$ . Pisteiden  $(\infty, y')$  sijainti muunnetulla kuvalla saadaan laskemalla raja-arvot

$$x'' = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{a_1x' + a_2y' + a_3}{a_7x' + a_8y' + 1} = \frac{a_1}{a_7} \text{ ja} \quad (61)$$

$$y'' = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{a_4x' + a_5y' + a_6}{a_7x' + a_8y' + 1} = \frac{a_4}{a_7}. \quad (62)$$

Vastaavasti pisteelle  $(x', \infty)$  saadaan

$$x'' = \lim_{y' \rightarrow \infty} \frac{a_1x' + a_2y' + a_3}{a_7x' + a_8y' + 1} = \frac{a_2}{a_8} \text{ ja} \quad (63)$$

$$y'' = \lim_{y' \rightarrow \infty} \frac{a_4x' + a_5y' + a_6}{a_7x' + a_8y' + 1} = \frac{a_5}{a_8}. \quad (64)$$

Pisteiden  $(0, 0)$  sijainniksi saadaan

$$x'' = \frac{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3}{a_7 \cdot 0 + a_8 \cdot 0 + 1} = a_3 \text{ ja} \quad (65)$$

$$y'' = \frac{a_4 \cdot 0 + a_5 \cdot 0 + a_6}{a_7 \cdot 0 + a_8 \cdot 0 + 1} = a_6. \quad (66)$$

Pisteistä  $(a_1/a_7, a_4/a_7)$  ja  $(a_2/a_8, a_5/a_8)$  piirrettyjen viuhkojen ja pisteen  $(c, f)$  avulla voidaan päätellä aika paljon kyseessä olevasta muunnoksesta. Otetaanpa esimerkiksi kuvassa 19 esitetty muunnos. Sitä vastaavat muunnosparametrit on esitetty seuraavassa taulukossa:

parametri	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
arvo	0.9398	0.0472	30.0000	0.2250	0.8410	0.0000	0.0006	-0.0006

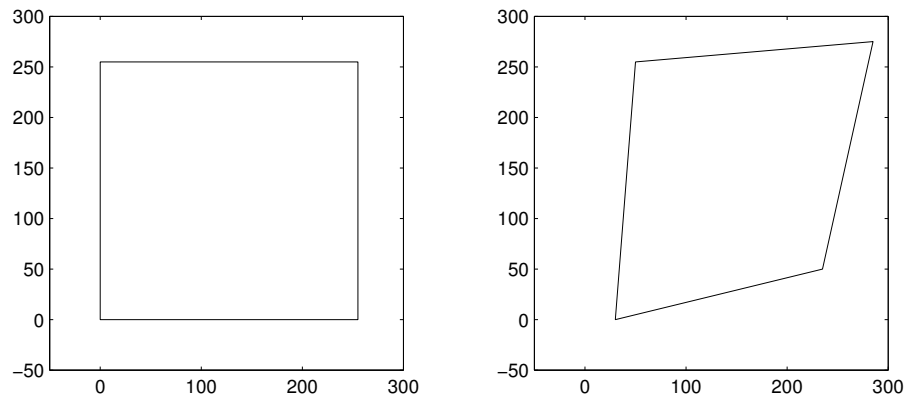
Saadaan siis

$$\left(\frac{a_1}{a_7}, \frac{a_4}{a_7}\right) = (1625.1, 389.1), \quad (67)$$

$$\left(\frac{a_2}{a_8}, \frac{a_5}{a_8}\right) = (-75.8, -1348.4) \text{ ja} \quad (68)$$

$$(a_3, a_6) = (30.0, 0.0). \quad (69)$$

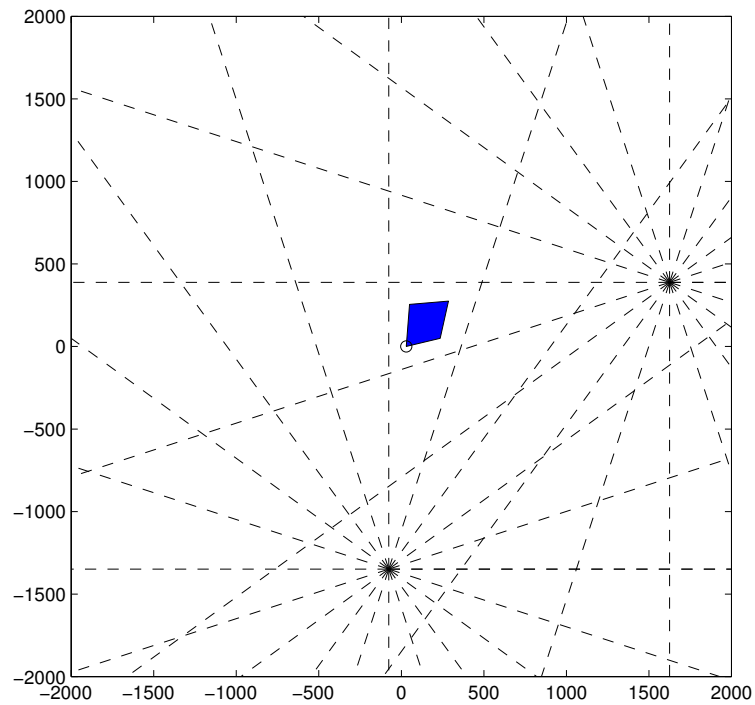
Näiden pisteiden avulla voidaan muunnettuun kuva-avaruuteen piirtää alkuperäisen kuvan origo ja koordinaattiakselien ”pakopisteet” (kuva 20). Piirämällä pisteistä  $(1625.1, 389.1)$  ja  $(-75.8, -1348.4)$  sädeviuhkia saadaan aikaan ruudusto, joka kuvaa erittäin hyvin muunnoksen käyttäytymistä. Lisäksi piirroksen avulla voidaan jossain määrin tehdä päätelmiä myös siitä, mitä tapahtuu jotain tiettyä muunnosparametria muutettaessa. Esimerkiksi jos parametrin  $a_4$  arvoa pienennetään, valuu piste  $(1625.1, 389.1)$  alaspäin. Tätä havainnollistaa kuva 21. Parametrin  $a_4$  arvo on puolitettu jolloin toinen erikoispiste on tullut puolta lähemmäs x-akselia.



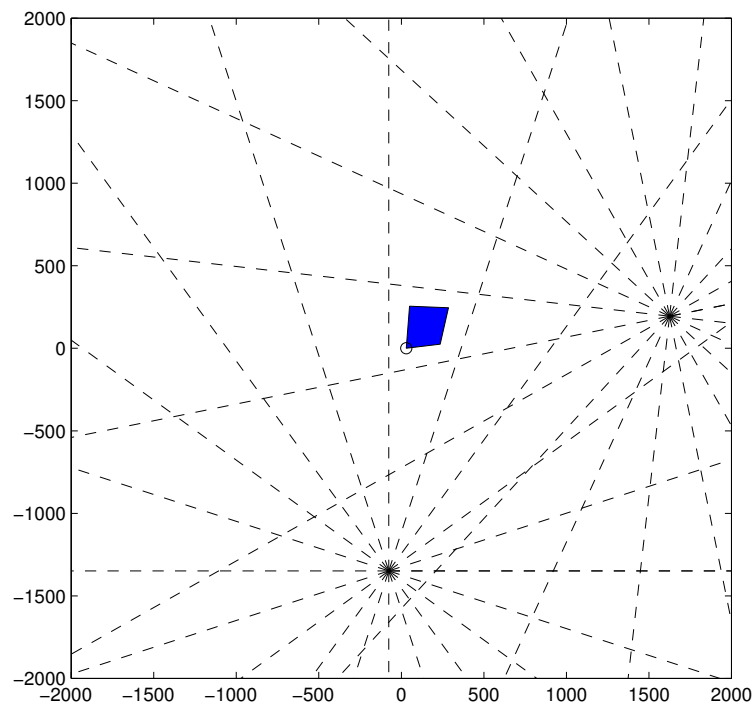
Kuva 19: Tarkastelun alla oleva muunnos.

## 6 Loppusanat

Tässä työssä on tutkittu kaksiulotteista projektiivista muunnosta. Tavoitteena oli löytää siitä jotain uutta ja käyttökelpoista. Se, miten tavoite täyttyi jätetään lukijan arvioitavaksi. Tekijän itsenä mielestä työn parasta antia ovat kappaleessa 5 esitetyt tulokset.



Kuva 20: Erikoispisteet auttavat muunnoksen tulkinnessa. Pieni rengas nelikulmion nurkassa osoittaa alkuperäisen kuvan origon sijainnin muunnoksen jälkeen.



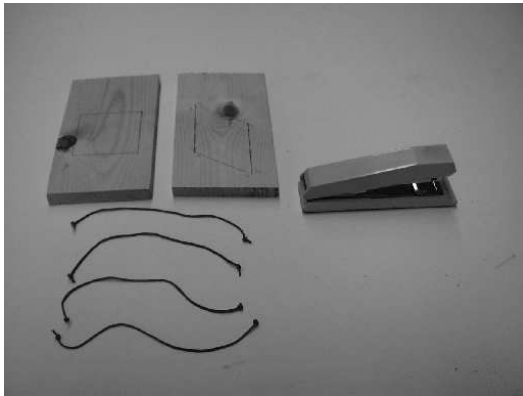
Kuva 21: Parametrin  $a_4$  puolittaminen näkyy oikeanpuoleisen erikoispisteen liikkeenä.

## Viitteet

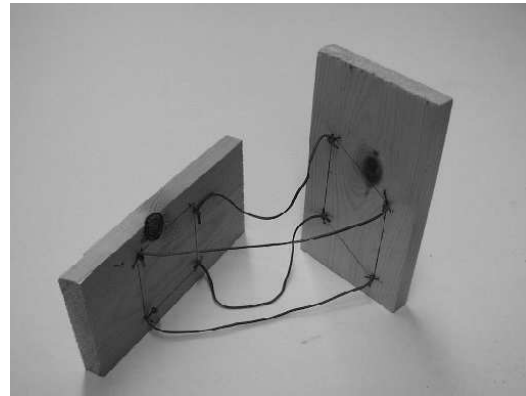
- [Inkilä 1997] Inkilä, Keijo. *Pienimmän neliösumman estimointi*. Teknillinen korkeakoulu, Fotogrammetrian ja kaukokartoituksen laboratorio, Otaniemi, 1997, ISBN 951-22-3305-3.
- [Kivelä 1986] Kivelä, Simo K., *Perspektiivioppi ja aksonometria*. Otapaino 1986.
- [Kreyszig 1993] Kreyszig, Erwin, *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Niini 1990] Niini, Ilkka, *Kuvien keskinäinen orientointi kaksiulotteisia projekttiivisiä muunnoksia käyttäen*, diplomityö, Espoo, 1990.
- [Nyström 1968] Nyström, E. J. *Fotogrammetrian geometriset perusteet*. Teknillinen korkeakoulu, Maanmittaustekniikan laitos, Helsinki, 1968.
- [Slama et al. 1980] Slama, C. C. (Ed.), Theurer C. (Ed.), Henriksen S. W. (Ed.), *Manual of Photogrammetry*, American Society of Photogrammetry, 1980.
- [Wang 1990] Wang, Zhizhuo. *Principles of Photogrammetry (with Remote Sensing)*. Press of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, 1990.

## Liite 1: Yksinkertainen havaintoväline

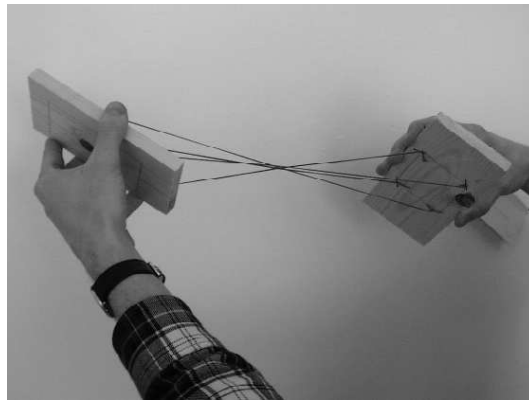
Projektiivisiä tasolta tasolle tapahtuvia muunnoksia voi tutkia kätevästi tässä liitteessä esiteltävän havaintovälineen avulla. Sen rakentamiseen tarvitaan pari laudanpalasta, neljä kuminauhanpätkää ja nitoja. Laudanpalasiin piirretään alkuperäisen ja muunnetun kuvan nurkat. Vastinpisteet yhdistetään kuminauhanpätkillä (kuva 23). Kuvien aseman toisiinsa nähden saadaan siten, että etsitään laudanpätkille sellaiset asemat, että kuminauhat kulkevat saman pisteen kautta taivuttamatta (kuva 24).



Kuva 22: Tarvikkeet havaintovälinettä varten.



Kuva 23: Vastinpisteet yhdistettynä toisiinsa kuminauhoilla.



Kuva 24: ”Hmm, näin sen täytyy olla”.

## Liite 2: Matlab-koodeja muunnoksen testailuun

Matlab on kätevä ohjelma monien matemaattisten ongelmien tutkimiseen. Tässä liitteessä on esitetty kolme funktiota, joita voidaan käyttää hyväksi projektiivisten muunnosten ominaisuuksien tutkimisessa. Funktio `RatkaiseParametrit` ratkoo vastinpisteiden kuvakoordinaattien avulla muunnosparametrit, funktio `Muunna` muuntaa annetut pisteet annetuilla muunnosparametreilla ja funktio `Viuhka` piirtää muunnosta vastaavat erikoispisteet ja sädeviuhkat (katso luku 5.3).

### RatkaiseParametrit:

```
function param=RatkaiseParametrit(sx,sy,tx,ty)

% Funktio ratkisee kaksiulotteisen projektiivisen muunnoksen
% parametrit. Vektorit sx ja sy sisältävät pisteiden koordinaatit
% alkuperäisessä ja tx ja ty muunnetussa koordinaatistossa.

A=zeros(2*length(sx),8);
l=zeros(2*length(sx),1);

k=1;
for i=1:length(sx)
    A(k,1)=sx(i);A(k,2)=sy(i);A(k,3)=1;A(k,7)=-sx(i)*tx(i);A(k,8)=-sy(i)*tx(i);
    l(k)=tx(i); k=k+1;
    A(k,4)=sx(i);A(k,5)=sy(i);A(k,6)=1;A(k,7)=-sx(i)*ty(i);A(k,8)=-sy(i)*ty(i);
    l(k)=ty(i); k=k+1;
end
param=A\l;

return;
```

### Muunna:

```
function muunnetut=Muunna(sx,sy,p,piirto)

% Funktio muuntaa vektoreiden sx ja sy koordinaatit vektorissa p
% annettujen muunnosparametrien avulla. Jos parametri piirto on
% annettu arvo yksi, piirretään alkuperäinen ja muunnettu pisteistö ikkunaan.

tx=(p(1)*sx+p(2)*sy+p(3))./(p(7)*sx+p(8)*sy+1);
ty=(p(4)*sx+p(5)*sy+p(6))./(p(7)*sx+p(8)*sy+1);

if piirto==1
    figure;
    subplot(1,2,1);
    plot(sx,sy,'+');
```

```
    subplot(1,2,2);  
    plot(tx,ty,'+');  
end
```

```
result=[tx ;ty];
```

```
return;
```

## Viuhka:

```
function []=Viuhka(param,slkm,s)
```

```
% Funktio piirää aktiiviseen ikkunaan muunnetun origon ja muunetuista  
% pakopisteistä lähtevät sädeviuhkat. Vektori param sisältää muunnoksen  
% parametrit, slkm on piirrettävien säteiden lukumäärä ja s on niiden pituus.
```

```
hold on;
```

```
plot(param(3),param(4),'o'); % piirretään muunnettu origo
```

```
px=param(1)/param(7); py=param(4)/param(7); % ensimmäinen pakopiste
```

```
for i=0:2*pi/slkm:2*pi  
    dx=s*cos(i);  
    dy=s*sin(i);  
    plot([px px+dx],[py py+dy]);  
end
```

```
px=param(2)/param(8); py=param(5)/param(8); % toinen pakopiste
```

```
for i=0:2*pi/slkm:2*pi  
    dx=s*cos(i);  
    dy=s*sin(i);  
    plot([px px+dx],[py py+dy]);  
end
```

```
hold off;
```

```
return;
```